INTEROGAŢII EPISTEMOLOGICE PRIVIND CONCEPTUL DE FUNCŢIE DIN MATEMATICĂ

MARIUS AUGUSTIN DRĂGHICI

Epistemological Notes on the Mathematical Concept of Function. In this paper I have attempted to provide an application of the „Intermediate Value Theorem of a Continous Function to the outcome of an experiment of quantum mechanics. Our conclusion rises certain question regarding the very nature of the quantum world, the nature of space-time concept of that realm (a *continuum space-time*) and the status of the concept of causality. Also, yet other questions might be addressed aiming the foundation of our ways of making and reflecting on science (i.e., mathematical and physical instruments, etc.).

Key words: Intermediate Value Theorem, Function, Quantum Entanglament, Experiment, Einstein, Bohr.

În acest text ne propunem unele reflecţii epistemologice (dacă termenul ultim nu este prea pretenţios) în legătură cu conceptul de funcţie din matematică. Dincolo de un scurt istoric al conceptului şi unde vom urmări evoluţia, dezvoltarea acestui concept, precum şi alte câteva elemente care circumscriu interesul nostru din aceste însemnări, ceea ce vom lua în atenţie nu este, desigur, problematica vastă şi extrem de complicată a funcţiei matematice *în general*; ne vom rezuma la un caz particular, al aplicabilităţii unui model de funcţie (continuă) la un fenomen experimental/t din comportarea cuantică[1]. Este vorba despre semnele de întrebare ridicate de încercarea şi şansele de a modela comportarea „la distanţă" a perechilor de particule cuantice cu ajutorul modelului de „funcţie continuă" relevat de „Teorema valorii intermediare". Mai spunem că precauţia noastră cu privire la problematică se referă la faptul că nu intenţionăm aici decât să punem în lumină două posibile modalităţi (ştiinţifice) de raportare la un fenomen experimental din punctul de vedere şi cu uneltele interogaţiei filosofice.

Conceptul de funcţie (chiar şi în matematică) poate avea înţelesuri şi sensuri diferite în funcţie (!) de poziţionarea disciplinară etc. a evaluatorului. Istoric, ştim că ceea ce se înţelege astăzi prin conceptul (matematic) de funcţie tratat *ca atare* are o oarecare legătură cu descoperirea analizei infinitului. Aplicarea metodei analitice la

[1] Preferăm, doar aici, expresia lui R. Feynman („comportarea cuantică"), pentru a arăta că termenul consacrat de „mecanică" cuantică nu este potrivit – mecanica este în legătură cu vechiul model al fizicii (cel clasic, determinist), care nu mai poate da seama de natura probabilistică a fizicii cuantelor.

geometrie („invenţia" lui Descartes) a deschis perspectiva asupra eforturilor lui Leibniz şi Newton privind calculul infinitezimal. Totuşi, istoricii (matematicilor) ne spun că există abordări (implicite) ale funcţiei încă cu medievali precum Nicole Oresme (1323–1382), episcop de Lisieux. Acesta, fără formule şi, fireşte, în absenţa geometriei analitice (Descartes), a elaborat pentru prima dată reprezentarea grafică a funcţiilor, până la un anumit grad[2].

Necesitatea formulării teoriei funcţiilor (a „diferenţierii" şi „integrării lor") în economia calculului infinitezimal (şi nu numai) este de remarcat prin aceea că probleme precum variaţia vitezei, panta unei curbe etc. cereau un alt tip de calcul decât ceea ce era furnizat până, să zicem, la Oresme. Se pare că Descartes a fost primul care a susţinut că o ecuaţie cu două variabile reprezentată de o curbă indică o dependenţă cantitativă între variabile. Ideea de derivativă a funcţiei a fost astfel ulterior determinată de Newton ca modalitatea de a găsi tangenta la fiecare punct al unei curbe (ca reprezentare a unei funcţii). Tot Newton a fost printre primii matematicieni care a arătat cum funcţiile pot fi dezvoltate în serii de puteri infinite, introducându-se, astfel, procesele infinite.

În ceea ce priveşte prima utilizare a termenului de „funcţie" (ca atare), aceasta ar fi fost consemnată în dreptul lui Leibniz (1673). La acesta, termenul de funcţie însemna, la modul general, dependenţa unor cantităţi geometrice (precum subtangentele) de forma unei curbe. De asemenea, tot Leibniz a introdus termenii de „constantă", „variabilă" şi „parametru"[3].

Ca dintre cele mai frecventate arii ale matematicii în ceea ce priveşte prezenţa funcţiilor (directă şi/sau indirectă), amintim aici analiza matematică, teoriile ecuaţiilor diferenţiale şi integrale, analiza funcţională etc. Funcţia şi derivata ei, considerată una dintre cele mai importante noţiuni în matematică, reprezintă (J. P. Ponte) chiar fundaţia analizei matematice, analiză care şi-a găsit, cu această ocazie, un rol şi un loc centrale în dezvoltarea matematicii în general.

Exemple, instanţieri particulare ale funcţiilor, pot fi găsite încă în perioada antică: numărarea, care implică o corespondenţă între o mulţime de obiecte date şi o succesiune de numere adunate/numărate; operaţiile aritmetice elementare, care sunt funcţii de cel puţin două variabile (în ceea ce priveşte adunarea, de exemplu, suma de 5 presupune adunarea, de pildă, a lui 2 cu 3 şi se scrie „funcţie de x + y = 5", sau f(x + y) = 5); aria, rădăcina pătrată, cubică, funcţiile trigonometrice etc.

Despre începuturi mai reamintim aici că, odată cu dezvoltarea studiului curbelor prin metode algebrice, s-a vădit necesitatea apariţiei unui termen care să poată reprezenta cantităţi dependente de o variabilă folosind expresia analitică. Acest sens al funcţiei a fost adoptat la finele secolului 17, graţie corespondenţei dintre Leibniz şi Bernoulli (definiţia acestuia din urmă, de regăsit într-un articol de

[2] Pentru alte referinţe, vezi Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, (trad. de Alexandru Giuculescu), Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, p. 156-160.

[3] În această parte îl vom avea drept ghid pe João Pedro Ponte, *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications*, în *The Mathematics, Volume 3, No. 2,* p. 2 (http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v03n2/Ponte.pdf).

la 1718, descria acest concept ca o cantitate compusă într-un fel din variabile şi constante – „funcţia unei variabile”)[4]. Ulterior, Euler (fost student al lui Bernoulli) a universalizat definiţia prin aceea că înlocuit cu totul „cantităţile” prin expresii analitice. Cu secolul 19 însă, noţiunea de funcţie a suferit succesive clarificări şi extinderi care i-au modificat inclusiv natura şi înţelesul. Primul impuls în acest sens a fost dat de controversa faimoasă cu privire la problema corzilor vibrante[5].

O altă importantă contribuţie la evoluţia funcţiei se datorează muncii lui Fourier. Acesta, pornind de la chestiunea fluxului de căldură în corpurile materiale, a considerat temperatura ca funcţie a două variabile: timpul şi spaţiul. Apoi, la un moment dat, fără să ofere şi o demonstraţie matematică, Fourier presupune posibilitatea de a obţine o dezvoltare a oricărei funcţii în serii trigonometrice pe un anumit interval. Ulterior, această problemă a fost preluată de Dirichlet, care, separând conceptul de funcţie de reprezentarea sa analitică, a formulat şi condiţiile suficiente astfel încât o funcţie să poată fi reprezentată de o serie Fourier. Dirichlet defineşte, astfel, funcţia în termenii unei corespondenţe arbitrare între variabile care reprezintă mulţimi numerice. În acest sens, funcţia devine o corespondenţă între două variabile astfel încât oricărei variabile independente îi este asociată o singură valoare a variabilei dependente.

Odată cu dezvoltarea teoriei mulţimilor iniţiată de către Cantor, noţiunea de funcţie a cunoscut noi extinderi urmând ca, în secolul 20, funcţia să fie extinsă astfel încât să includă toate corespondenţele arbitrare care satisfac cel puţin condiţia de unicitate între mulţimi, fie ele numerice sau non-numerice. Următorul pas în transformarea acestui concept este făcut prin trecerea de la accentul pe noţiunea de corespondenţă la cel pe noţiunea de relaţie. Având iniţial rolul de a desemna corespondenţe între entităţi geometrice, funcţia şi-a asigurat mai apoi un loc fundamental în centrul gândirii matematice datorită asocierii ei cu studiul expresiilor analitice; sau, altfel spus, datorită introducerii funcţiilor în matematică prin metoda analitică, precum şi pentru eficienţa superioară a acestora. Apoi, nu a fost nevoie decât de un pas ca noţiunea de funcţie să-şi găsească un loc central în toate ştiinţele exacte[6].

Legându-ne de ultima idee de mai sus, după acest scurt istoric al conceptului de funcţie prilejuit, în principal, de lectura textului lui J.P. Ponte, luăm în considerare acum, pentru a ajunge la chestiunea care justifică scrierea acestor rânduri, realitatea că noţiunea *matematică* de funcţie a apărut din necesităţi (matematice) instrumentale pentru studiul cantitativ al fenomenelor naturale. Acest lucru a debutat încă cu Galilei şi Kepler. Dezvoltarea ulterioară a avut apoi ca bază multitudinea de posibilităţi oferite de noutatea adusă de notaţia algebrică a lui Viète precum şi, desigur, de geometria analitică introdusă cu Descartes şi Fermat[7].

[4] *Ibidem*, p. 4.
[5] Vezi Alain Michel, *Analiza armonică*, în *Dicţionar de istoria şi filosofia ştiinţelor* (Dominique Lecourt, coord.), trad. de: Laurenţiu Zoicaş (coord. pt. varianta tradusă în lb. română), et. al. Aliza Ardeleanu, Camelia Capverde, Antonia Cristinoi, Dana Ligia Ilin, Ileana Littera, Marius Roman, Elena Soare, Violeta Vintilescu, Editura Polirom, Bucureşti, 2005, p. 78.
[6] Vezi João Pedro Ponte, *ibidem*, p. 6.
[7] *Ibidem*, p. 7.

Deşi astăzi lucrurile sunt mai complicate, în sensul celor de mai sus trebuie înţeleasă ideea lui Galilei după care matematica reprezintă cea mai proprie limbă pentru studierea naturii (pentru a studia un fenomen, spune Galilei, este necesar să fie măsurate cantităţile, să i se identifice regularităţile şi să se obţină relaţiile reciproce reprezentând descrierile matematic cât mai simplu posibil)[8]. Studierea mişcării obiectelor care cad, a mişcării planetelor, şi, mai general, a mişcării curbilinii conduce la luarea în atenţie atât a cazurilor de proporţionalitate (directă sau indirectă) cât şi a funcţiilor polinomiale şi trigonometrice. Se observă astfel strânsa inter-conectivitate între matematică şi fizica teoretică. Ca simplă observaţie, poate, nu doar Newton, ci şi alţi mari matematicieni au fost şi fizicieni în egală măsură: Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange şi Fourier.

Pentru a şi ilustra felul cum funcţiile sunt instrumente excelente pentru înţelegerea şi rezolvarea unor probleme ale variaţiei, redăm un exemplu prezent în textul lui J.P. Ponte privind una dintre cele mai extraordinare descoperiri ale lui Newton. Savantul englez, spune autorul nostru, a găsit că legea variaţiei mişcării unui corp cu masa m, care în limbaj modern presupune o notaţie dată de funcţia $s(t)$, spaţiul variind ca o funcţie a timpului, nu presupune o relaţie directă cu forţa f care acţionează asupra acelui corp. O simplă relaţie de reciprocitate nu există pentru legea vitezei dată prin $v(t)$, în care v este derivativa lui s, ds/dt. O astfel de relaţie, pe de altă parte, există pentru acceleraţia corpului respectiv, dată prin $a(t)$, a doua derivativă a lui s, adică, dv/dt, şi este exprimată prin simpla lege: $f=ma$[9].

Vedem astfel cum o anumită cantitate poate varia în timp, în spaţiu, în legătură sau în funcţie de alte cantităţi; dar aceasta, s-a demonstrat mai recent, poate chiar varia simultan în mai multe dimensiuni. Astfel de variaţii pot fi mai rapide sau mai lente, sau pot chiar să dispară la un moment dat. Pot urma paternuri simple sau complexe şi se pot supune unor restricţii foarte diverse.

Revenind la originile noţiunii de funcţie, şi suntem pe deplin de acord cu Ponte, aceasta a fost asociată cu cea de lege naturală. Ideea de regularitate, în schimb, a fost unul dintre cele mai importante elemente constitutive ale funcţiei. Pedro determină, în acest sens, trei elemente esenţiale în formarea concepţiei despre funcţie, specifice secolelor 17 şi 18: a) notaţia algebrică a funcţiei, răspunzătoare de importantele aspecte precum cel de simplitate şi rigoare, care permite manipularea expresiilor analitice şi condensează o mare plajă de informaţie; b) reprezentarea geometrică a unei funcţii, care subîntinde baza intuitivă fundamentală, şi căreia i se datorează, de exemplu, asocierea noţiunii de tangentă cu o curbă şi [i se datorează] derivata unei funcţii; c) legătura cu probleme concrete ale lumii fizice, asociate cu ideea de regularitate – aici menţionăm excepţia din fizica particulelor – oferind motivaţia şi interesul fundamentale pentru studierea familiilor de funcţii.

În contextul nostru, mai aducem în discuţie, mai ales legat de aplicabilitatea funcţiei la fenomene studiate de fizica teoretică, ideea de model. Se ştie, modelul

[8] *Ibidem.*
[9] *Ibidem*.

matematic reprezintă baza tuturor aplicaţiilor matematicii în general. Ceea ce este instructiv este faptul că noţiunea de funcţie este fundamentul acestuia. După J. P. Ponte, definiţia cea mai simplă şi intuitivă a modelului este următoarea: un model matematic este o reprezentare prin relaţii şi structuri care intenţionează să descrie elementele fundamentale într-o situaţie dată, în timp ce sunt omise, deliberat, elementele secundare. Un model matematic poate lua, fireşte, diferite forme, dar uzual spunem că este constituit din variabile, relaţii între aceste variabile, şi (între) ratele de schimbare corespunzătoare. Mai spunem că procesul construirii unui model matematic implică un anumit număr de faze, începând cu situaţia ca atare până la descrierea matematică şi întoarcerea la situaţie din nou. Pentru un rezultat satisfăcător sunt necesare, de asemenea, anumite cicluri; la fel, activităţi diversificate, să le spunem, constituie o parte integrantă a acestui proces în ansamblu[10].

Având în vedere elementele de mai sus, încercăm acum să prezentăm o aplicaţie a unei funcţii matematice (continue) la un caz din fizica particulelor, pe care, mai jos, îl vom lua în discuţie. Este vorba despre celebra poveste a „legăturii la distanţă" sau „inseparabilitatea cuantică" a perechilor de particule subatomice aflate în legătură, care îşi au originea în disputa Einstein – Bohr privind caracterul, structura şi natura obiectului experimental din fizica cuantică, sau, mai simplu, statutul realităţii fizice a lumii elementare.

Problema de la care s-a pornit consta în imposibilitatea de a putea stabili cu certitudine, *în acelaşi timp*, atât poziţia („localizarea") cât şi viteza de deplasare a particulelor *în momentul observării experimentale*. Acest „moment al observării" conducea, întotdeauna, la pierderea posibilităţii de a măsura determinaţiile unuia dintre indicatori: fie se pierdea „locul" unde se află particula, fie era imposibil de măsurat viteza de deplasare a acesteia – în funcţie de ceea ce anume se avea în vedere: fie determinarea poziţiei, fie a vitezei. Deci, niciodată nu puteau fi determinate ambele în acelaşi timp.

Interesant este că, în intervalul dintre măsurători, sistemul măsurabil subzistă, ca să spunem aşa, în ceea ce priveşte poziţia particulelor şi viteza lor de deplasare, ca „un sistem cuantic mixt". Sintagma utilizată este cea de „stare cuantică", în care nu pot fi prezente decât „probabilităţi" ale locurilor şi vitezelor particulelor, nimic stabil, static, adică măsurabil în termenii clasici. Descrierea matematică a acestei stări (statistice) poartă denumirea de „funcţie de undă" (wave function), în care totul se prezintă după modelul unei funcţii ce admite valori maxime şi minime stabilite probabilistic (dar care nu este susceptibilă de a fi determinată după transformări de tip Fourier, adică într-un produs al mai multor funcţii elementare independente, fiecare funcţie fiind o descriere a unei stări sau a unui fenomen individual, distincte între ele spaţial). Mai spunem că acest „interval" a fost calculat şi este descris de principiul de incertitudine al lui Heisenberg.

Cum ne spune istoria ştiinţei, Einstein nu a fost deloc mulţumit de această descriere (statistică) a realităţii elementare, „funcţia de undă" care modelează mate-

[10] *Ibidem.*

matic fenomenele stării cuantice fiind limitată de anumite „variabile ascunse”, care scapă lentilei cercetătorului, credea savantul. În acest sens, în 1935, alături de colegii Podolosky şi Rosen, Einstein a imaginat un experiment de gândire care să încadreze în termeni paradoxali această situaţie şi, prin această manieră, să ofere şi posibilitatea rezolvării acestei inconsistenţe (determinismul cauzal vs. probabilismul cuantic, în care nu se mai pot face predicţii exacte, de tipul ştiinţei înţeleasă în termenii tari, clasici).

Iată acum, sintetic, cum sună justificarea şi formularea experimentului imaginat de Einstein[11]. Ipoteza de la care porneşte acest experiment este că, pentru a avea o descriere mai fidelă a realităţii, ar trebui să fie posibil să putem măsura atât poziţia cât şi viteza de deplasare a particulelor, în caz contrar (aşa cum reiese din consecinţele principiului de incertitudine al lui Heisenberg) înseamnă că, măsurând o particulă (în ceea ce priveşte o caracteristică, de exemplu, poziţia), acest lucru nu doar că afectează întregul sistem, ci dezvăluie ceva mult mai grav: măsurarea sau „intervenţia” asupra particulei determină o reacţie „instantanee” din partea acesteia asupra sistemului (de exemplu, asupra altei particule cu care formează o pereche), iar acest termen, „instantaneu”, trebuie luat literal – adică, indiferent de distanţa la care se găsesc cele două particule una de alta (pot fi despărţite de mii de ani lumină sau situate la marginile universului), ele sunt într-un fel de legătură („Quantum Entenglement”) şi „comunică” între ele („spooky action at a distance”), depăşind astfel viteza luminii. Această ultimă asumpţie, se ştie, este o determinaţie fundamentală a teoriei relativităţii, în universul nostru neputând exista ceva care să depăşească această viteză[12].

Aceste ultime consecinţe nu au fost formulate în termenii de mai sus, la acea vreme discuţia rămânând la nivelul unei dispute majore (teoretice), nefiind performat niciun experiment standard în acest sens (stadiul evoluţiei tehnologice nu permitea acest lucru). Ceea ce însă a fost formulat şi susţinut de Einstein vorbea despre faptul că mecanica cuantică nu este o teorie completă, fiind necesară admiterea acelor „variabile ascunse” (ce ar urma să fie detectate şi cercetate ulterior).

Primul experiment imaginat care urma, ulterior, să dea dreptate uneia sau alteia dintre părţi (taberei lui Einstein respectiv celei a lui Bohr şi „Interpretării de la Copenhaga”) a aparţinut lui John Stuart Bell, care a formulat celebra „teoremă a inegalităţilor”. Pe scurt, conform acestei teoreme, dacă rezultatele experimentului ofereau valori prezise exact de mecanica cuantică, acest lucru ar fi exclus „variabilele ascunse” şi, astfel, ar fi infirmat poziţia EPR; dimpotrivă, dacă „inegalităţile lui Bell” erau confirmate de aceste rezultate, atunci ar fi însemnat că pot fi presupuse „variabilele” lui Einstein.

Rezultatele experimentale ulterioare au infirmat poziţia lui Einstein şi au confirmat-o pe cea a lui Bohr şi a Interpretării Copenhaga: comportamentul perechilor de particule emise de o sursă aflată la mijlocul axei pe care acestea se depărtează, una de

[11] Acest experiment este cunoscut ca „EPR Paradox” – Einstein-Podolsky-Rosen Paradox.

[12] Pentru ca un obiect etc. să poată depăşi viteza luminii, ar fi nevoie de o cantitate de energie infinită pentru a putea deplasa acel „obiect” – ceea ce este imposibil.

alta în sensuri opuse, este rezultatul procesului cuantic, analizat prin măsurarea uneia dintre proprietăţi (direcţia polarizării, de exemplu). Mai mult, aceste măsurători au certificat presupusa legătură („quantum entanglement") prezisă de mecanica cuantică, care intervine odată ce este declanşată această măsurătoare care face să colapseze acţiunea şi efectele „funcţiei de undă" (Wave Function). Reamintim că ceea ce descrie matematic graficul „funcţiei de undă" sunt valori probabilistice corespunzătoare tuturor particulelor sistemului cuantic luat în atenţie *fără intervenţia instrumentelor de măsurat*, rezultate conform principiului de incertitudine al lui Heisenberg.

Experimentului de mai sus i-au urmat altele numeroase (ultimul datează din 2015), toate confirmând că Bohr a avut dreptate, iar Einstein nu. Desigur, aceste experimente au fost rafinate, perfecţionate, mai ales ca urmare a unor critici care susţineau relativitatea rezultatelor dat fiind modul în care cele două măsurători prezintă certitudinea cerută (exista reproşul că relativismul înregistrării rezultatelor celor două măsurători impietează asupra consecinţelor ultime ale experimentului în general etc.).

Ceea a rămas, însă, cert, şi este lucrul care interesează în scrierea acestor rânduri, este că, deşi s-a acceptat, în final, şi posibilitatea că nu „schimbul de informaţie", „comunicarea de informaţie" (în sensul clasic) reprezintă ceea ce determină comportamentul ciudat al perechilor de particule conexate – nu există, de fapt, o denumire „pozitivă" a acestei modalităţi de comunicare, dincolo de consacrata şi sugestiva sintagmă originară „spooky action at a distance" – ci (şi cu acest lucru este toată lumea de acord, inclusiv puţinii sceptici rămaşi) că „ceva" face ca cele două particule-perechi să funcţioneze corelat, împreună, coordonându-se cumva. Prin urmare se evită, pe de o parte, riscul formulării unor ipoteze elucubrante (care s-ar fi putut baza pe aceste experimente) precum călătoria în timp, pe de altă parte, se sacrifică principiul fundamental al realităţii numit „localizare" (locality). Această „localizare" este definită, cu privire la univers, ca acea trăsătură a acestuia (şi a spaţiu-timpului) după care orice acţiune, influenţă de tip cauzal, se petrece, *în primul rând*, în imediata vecinătate a „sursei", iar acest lucru are loc cumva analog modului cum este propagată influenţa unei pietre care cade la suprafaţa apei.

Alături de legea fundamentală a teoriei relativităţii a lui Einstein ,după care nicio entitate nu se poate propaga în univers mai rapid decât viteza luminii, ceea ce mai reţinem de aici este ideea „localizării", care presupune un *continuum spaţio-temporal*.

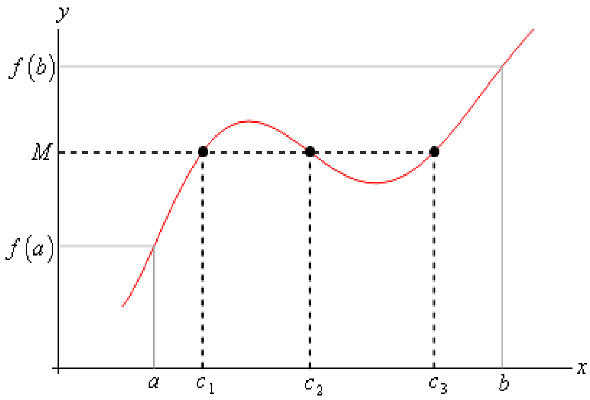
Revenind la discuţia noastră, iată modelarea pe care o propunem: utilizând „teorema valorii intermediare"[13] a unei funcţii continue asupra fenomenului de „quantum entanglement" al perechilor de particule, ne întrebăm care sunt posibilele consecinţe şi concluzii ce pot fi trase, mai ales din punct de vedere epistemologic.

Pe scurt, teorema valorii intermediare din analiza matematică ne spune că, dacă o funcţie continuă f, având ca interval $[a, b]$ cu domeniul corespunzător, ia valorile $f(a)$ şi $f(b)$ la fiecare capăt al intervalului, atunci ia de asemenea cel puţin o valoare între $f(a)$ şi $f(b)$ în anumite puncte *în interiorul intervalului* – pe dreapta M (vezi schiţa de mai jos) [14].

---

[13] Demonstrată, prima dată, de Bolzano la 1817.

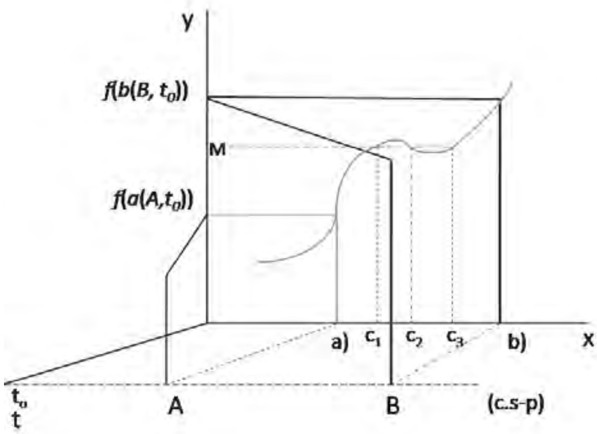
[14] http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/Continuity.aspx.



În aplicaţia propusă, utilizând graficul de mai sus, ne putem imagina reprezentarea valorilor luate de *momentele* măsurărilor particulelor a) şi b) pe y din experimentul nostru construind întâi, ca în graficul de mai jos, codomeniul încadrat de axa timpului *t* (care s-ar duce în direcţia S-V din punctul de origine, unde se intersectează axele y şi x la unghiuri egale).

Vedem că pe t_0, care presupune *momentul* măsurării particulei a) în A şi a particulei b) în B aflate în starea de „entanglement”, A-B nu permite niciun intermediar, ca în graficul funcţiei continue conform teoremei valorii intermediare, adică nu avem c_1, c_2, ..., c_n, deci nici sinusoida ca în figura de mai sus. Corespunzător, pe axa funcţiei f, avem *f(a, (A la* t_o*))* şi *f(b, (B la* t_o)) unde *M* este prezent *numai* în planul funcţiei continue conform teoremei valorii intermediare, *f(A,B,* t_o) aici, în al doilea grafic, neadmiţând nicio valoare intermediară.

Considerând t_o ca axa reprezentând *continuum* spaţio-temporal *(c.s-p)*, şi intervalul A-B corespunzător *momentului* măsurării particulelor „entanglement”, spunem că *f* apare în A şi B practic *la acelaşi moment* t_o, indiferent de distanţa (în timp şi spaţiu) a) – b).



Altfel spus, conform experimentelor, ştim că legătura a) – b) nu permite propagarea efectului *în timp* şi spaţiu conform teoriei realtivităţii în forma reprezentată

A – B, *fixabilă prin calcularea unor valori intermediare* intervalul funcţiei *f*(A, B, t_o), fenomenul petrecându-se „instantaneu" (depăşind viteza luminii). Cu alte cuvinte, considerând timpul şi spaţiu un *continuum spaţio-temporal* (c. s-p), teorema valorii intermediare (a unei funcţii continue) este infirmată de rezultatele experimentelor. Consecinţa fundamentală este că *spaţiu-timpul* nu este un *continuum*.

În concluzie, în urma celor de mai sus, s-ar putea ridica următoarele probleme: care este, de fapt, natura sistemului măsurat, descris de „quantum entanglement"? Este el de natura continuului sau este de alt fel? Dacă ar fi de natura continuului, atunci ar fi trebuit să avem, conform teoremei valorii intermediare, valori intermediare reprezentabile în interiorul intervalului funcţiei care reprezintă, spaţio-temporal, sistemul celor două particule („entanglate") măsurate, ceea ce nu se întâmplă; pe de altă parte, acest spaţiu-timp nu poate fi nici discret, căci, dacă ar fi (numai) discret (întrerupt), una dintre gravele consecinţe ar fi cel puţin faptul că deopotrivă electromagnetismul şi relativitatea demonstrate începând cu Maxwell şi Einstein îşi pierd fundamentul; de asemenea, o altă consecinţă, legată de ultima, este abandonarea principiului „localizării", ceea ce conduce la ruptura „de nivel", am putea spune, între sistemele reprezentate de la nivelul cuantic şi cele de la nivelul non-cuantic, acest scenariu, contraintuitiv dacă nu contradictoriu, ridicând serioase semne de întrebare cu privire chiar la semnificaţia a ceea ce numim cauzalitate şi chiar „realitate fizică".

Aceste semne de întrebare datează, de fapt, încă din secolul trecut, ceea ce am încercat să ilustrăm aici a fost doar o punere în oglindă a două maniere riguroase de a face ştiinţă în raportarea la un fenomen experimentat ştiinţific: aplicarea unei teoreme din analiză la rezultatele unui experiment din fizica teoretică.